Тринадесети фестивал на младите математици

Созопол, 2024 г.

Първи кръг, Тема за 10 – 12 клас

Задача 1. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, такива че
$$f(x^2+y) = xf(x) + \frac{f(y^2)}{y}$$
за произволни положителни реални числа x и y.

Задача 2. Нека $n \geq 3$ е естествено число. За всеки два съседни върха A и B на изпъкнал n-ъгълник намираме друг връх C, за който $\sphericalangle ACB$ е най-голям, и записваме мярката в градуси. Да се намери най-малката възможна стойност на сбора на записаните n числа.

Задача 3. Редицата $(a_n)_{n\geq 1}$ от естествени числа е такава, че $a_1 = 1$ и a_{m+n} дели $a_m + a_n$ за произволни естествени числа m и n.
а) Да се докаже, че ако редицата е неограничена, то $a_n = n$ за всяко n.
б) Съществува ли неконстантна ограничена редица с горните свойства?
(*Редица $(a_n)_{n\geq 1}$ от естествени числа е ограничена, ако съществува естествено число A, такова че $a_n \leq A$ за всяко n, и неограничена в противен случай.*)

Задача 4. Нека $n \geq 4$ е естествено число. Ръководителката на отбора по математика кани n каки на подготовка в планината. Първоначално всяка от каките знае по една клюка, която никоя друга не знае, и искат да си ги споделят. За по-голяма сигурност да не бъдат шпионирани от ръководителката, те разговарят само по двойки, като в разговор всяка от двете споделя на другата всички клюки, които знае до момента. Колко най-малко разговора са необходими, за да може всяка от каките да научи всички клюки?

Задача 5. Естествените числа a и b са взаимнопрости и са такива, че съществуват естествени числа m_2 и m_5, за които am_2+b е точен квадрат на естествено число, а am_5+b е точна пета степен на естествено число. Винаги ли съществува естествено число n, за което $an+b$ е точна k-та степен на естествено число, ако: а) $k = 7$; б) $k = 10$?

Задача 6. Даден е триъгълник ABC с центрове O и I на описаната и вписаната окръжности, съответно. Точката A_1 е симетричната на A относно I. Точката A_2 е такава, че правите BA_1 и BA_2 са симетрични спрямо BI и правите CA_1 и CA_2 са симетрични спрямо CI. Да се докаже, че $AO^2 = |A_2O^2 - A_2I^2|$.

Задача 7. Младият учен и Старият учен играят следната игра, редувайки се, като Младият започва първи. Играчът на ход попълва някоя от звездичките в уравнението
$$x^4 + *x^3 + *x^2 + *x + * = 0$$
с положително реално число. Кой има печеливша стратегия, ако целите на играчите са:
а) на Младия – полученото уравнение да няма реален корен, а на Стария – да има?
б) на Младия – полученото уравнение да има реален корен, а на Стария – да няма?

Задача 8. Във всяка клетка на таблица 2024×2024 е записана буквата A или B, като броят A-та във всеки ред е един и същи и броят B-та във всяка колона е един и същи. Александра и Борис играят следната игра, редувайки се, като Александра започва първа. За един ход играчът избира ред или колона и изтрива всички все още неизтрити букви в нея, стига обаче поне една буква да бъде изтрита в хода и след края на хода да има поне една неизтрита буква в таблицата. Играта приключва, когато остане точно една неизтрита буква в таблицата. Александра печели играта, ако буквата е A, а Борис – ако е B. Какъв е броят на първоначалните таблици, при които Александра има печеливша стратегия?