Тринадесети фестивал на младите математици

Созопол, 2024 г.

Трети кръг, Тема за 10 – 12 клас

Р Е Ш Е Н И Я

Задача 1. Да се намерят всички четворки (a, b, c, d) от естествени числа, такива че $\dfrac{ac+bd}{a+c}$ и $\dfrac{bc-ad}{b-d}$ са равни на простото число 90121.

Отговор. $(a, b, c, d) = (p, p^2, p, 1), (p, 1, p, p^2), (p(s+1), pt, p+s, t), (p(t+1), ps, p+t, s), (p+s, t, p(s+1), pt)$, $(p+t, s, p(t+1), ps)$, където $p = 90121$, $s = 300$, $t = 11$.

Решение. Непременно $b \neq d$ поради знаменателя на втората дроб от условието.

Нека първо p дели a и c и да запишем $a = px$, $c = py$. Ще работим само с първото уравнение. Имаме $xyp^2 + bd = p^2(x+y)$, значи p^2 дели bd. Еквивалентното уравнение $(x-1)(y-1) + \frac{bd}{p^2} = 1$, съответно $x = y = 1$ и $bd = p^2$. Понеже $b = d$ не е позволено, получаваме само решенията $(p, p^2, p, 1)$ и $(p, 1, p, p^2)$. (Проверка показва, че тези наистина изпълняват второто уравнение.)

Нека сега p дели b и d, не дели поне едно от a и c и да запишем $b = pz$, $d = pt$. Първо $ac + p^2zt = p(a+c)$, съответно без ограничение p дели a и не дели c. При $a = px$ следва $xc + pzt = px + c$, т.е. $p(x - zt) = c(x-1)$, съответно (понеже p е просто и не дели c) p дели $x-1$. Сега при $x = py+1$ следва $yc + zt = py + 1$ и в частност $c < p + \frac{1}{y} \leq p+1$, т.е. $c \leq p$. Обаче второто уравнение се преобразува до $zc - p^2ty = pz$, значи $c > p$, противоречие. Така в този случай няма решение.

Вече можем да считаме, че p не дели поне едно от a и c и не дели поне едно от b и d. Имаме $\frac{ac+bd}{a+c} = \frac{bc-ad}{b-d}$, еквивалентно на $d(a^2+b^2) = b(c^2+d^2)$, както и $\frac{(ac+bd)(bc-ad)}{(a+c)(b-d)} = p^2$. Заедно с второто уравнение от условието следва, че b дели $a^2d, d(a-p)$ а значи и $d(a^2-p^2) = da^2 - dp^2$, т.е. b дели dp^2; аналогично d дели bp^2. Ако допуснем, че p не дели нито b, нито d, то би следвало, че b дели d и d дели b, т.е. $b = d$, което не е позволено.

Оттук нататък без ограничение p дели d, но не дели b. Понеже p дели $ac+bd$ и $bc-ad$, то p дели ac и bc, съответно p дели c и не дели a. При $c = px$, $d = py$ дадените уравнения стават (след съкращаване на p)

$$ax + by = a + px, \quad bx - ay = b - py,$$

т.е. $a(x-1) + by = px, ay - b(x-1) = py$. Оттук $(x-1)(a^2+b^2) = p(ax-by)$, $y(a^2+b^2) = p(bx+ay)$. Ако p дели $x-1$ и y, то $x = pz+1$, $y = pt$ и $az + bt = pz + 1$, $at - bz = pt$, откъдето $a \leq p$ от първото и $a > p$ от второто, противоречие. Припомняме, че a и b не се делят на p. Ако p не дели $x-1$, то непременно p не дели y (иначе $a(x-1) = px - by$ би се деляло на p) и ако p не дели y, то p не дели $x-1$ (иначе $ay = b(x-1) + py$ би се деляло на p). Така от $y(a^2+b^2) = p(bx+ay)$ следва, че p дели a^2+b^2 и y дели pbx, т.е. y дели bx. Сега $bx - ay = b - py$ дава, че y дели b. От друга страна, b дели $x(a-p) - a$ и $y(a-p)$, значи дели $xy(a-p) - ay - xy(a-p)$, т.е. дели ay и сега от $bx - ay = b - py$ следва, че b дели py, т.е. (понеже p не дели b) b дели y. Оттук като необходимо условие получаваме $y = b$. Основните уравнения се опростяват до $ax + y^2 = a + px$ и $x - a = 1 - p$, т.е. $a = p + x - 1$ и $p = (x-1)^2 + y^2$. Използвайки известния факт, че всяко просто число $p \equiv 1 \pmod 4$ се представя по единствен начин (с точност до размествания) като сбор на два квадрата на естествени числа, за $p = 300^2 + 11^2$ получаваме $x = 301$, $y = 11$ или $x = 12$, $y = 300$, оттук директно и a, b, c, d.

Коментар. Ако $p \equiv 3 \pmod 4$, то решенията са само $(p, p^2, p, 1)$ и $(p, 1, p, p^2)$, понеже p не може да се представи като сбор на два квадрата (а и от $p \mid a^2 + b^2$ и $p \nmid a$ имаме директно противоречие).

Оценяване. 2 т. за напълно верен отговор, 2 т. за случая когато p дели a и c, 1 т. за случая когато p дели b и d, 1 т. за случая, когато p не дели нито b, нито d, 6 т. за случая, когато p не дели a, b и дели c, d, от които 4 т. за достигане до $p = (x-1)^2 + y^2$ (или представяне, от което веднага могат да се възстановят стойностите на променливите), 2 т. за довършване.

Задача 2. Нека m, n и a са естествени числа. Лумис има m картончета, на всяко от които е записано числото n, и безкраен брой картончета с всеки от знаците събиране, изваждане, умножение, деление, отваряща и затваряща скоба. Умбра съставил с тях аритметичен израз, чиято стойност е естествено число, по-малко от $\dfrac{n}{2^m}$. Да се докаже, че ако навсякъде заменим n с a, то новополученият израз ще има същата стойност, както преди, или няма да е дефиниран поради деление на нула.

Решение. За полином f с реални коефициенти със $\sigma(f)$ ще означаваме сбора от абсолютните стойности на неговите коефициенти. Да забележим, че от неравенството на триъгълника са в сила следните две твърдения:

1) $\sigma(f + g) \leq \sigma(f) + \sigma(g)$, $\forall f, g \in \mathbb{R}[x]$;

2) $\sigma(fg) \leq \sigma(f)\sigma(g)$, $\forall f, g \in \mathbb{R}[x]$.

Ще докажем, че за всяко естествено число k за израз от посочения вид, в който фигурират k картончета с числото n, съществуват полиноми P и Q с цели коефициенти, за които изразът има стойност $\dfrac{P(n)}{Q(n)}$, като освен това

$$\sigma(P) + \sigma(Q) \leq 2^k$$

Провеждаме индукция по k. При $k = 1$ изразът ще има стойност $\pm n$, т.е. полиномите $P(x) = x$ и $Q \equiv \pm 1$ (знакът е същият като в стойността) изпълняват равенството и същевременно $\sigma(P) + \sigma(Q) = 2 = 2^1$. Да допуснем сега, че твърдението е в сила за всички естествени числа, които са по-малки от k, и да разгледаме аритметичен израз с k картончета с числото n. Нека започнем последователно да извършваме операциите в него, спазвайки реда на действия, докато не достигнем до последната операция. Нека първото число в тази операция е получено от s картички с числото n, а второто е получено от останалите $k - s$ такива картички, където $1 \leq s \leq k - 1$. От индуктивната хипотеза получаваме, че първото число можем да запишем във вида $\dfrac{A(n)}{B(n)}$, а второто – като $\dfrac{C(n)}{D(n)}$, където $A, B, C, D \in \mathbb{Z}[x]$, $\sigma(A) + \sigma(B) \leq 2^s$ и $\sigma(C) + \sigma(D) \leq 2^{k-s}$. Ако операцията е събиране (за изваждане разсъжденията са аналогични), то финалната стойност има вида

$$\frac{A(n)}{B(n)} + \frac{C(n)}{D(n)} = \frac{A(n)D(n) + B(n)C(n)}{B(n)D(n)}$$

Значи за полиномите $P = AD + BC,\ Q = BD$ исканото равенство се изпълнява; остава да докажем, че $\sigma(P) + \sigma(Q) \leq 2^k$. Действително от свойствата на σ полуаваме, че

$$\sigma(AD + BC) \leq \sigma(A)\sigma(D) + \sigma(B)\sigma(C) \qquad \text{и} \qquad \sigma(BD) \leq \sigma(B)\sigma(D)$$

От последните две следва, че

$$\sigma(P) + \sigma(Q) \leq (\sigma(A) + \sigma(B))(\sigma(C) + \sigma(D)) \leq 2^k$$

Ако операцията е умножение (разсъжденията са аналогични за деление), то финалната стойност има вида

$$\frac{A(n)C(n)}{B(n)D(n)}$$

Значи за полиномите $P = AC, Q = BD$ исканото равенство е в сила, като освен това

$$\sigma(P) + \sigma(Q) = \sigma(AC) + \sigma(BD) \leq (\sigma(A) + \sigma(B))(\sigma(C) + \sigma(D)) \leq 2^k$$

С това индукцията е завършена и твърдението е доказано.

Да се върнем към началната задача. Нека с $b < \frac{n}{2^m}$ (което е възможно при $n \geq 2$; иначе $b < \frac{1}{2^m}$ и не може да е естествено число) означим стойността на израза, съставен чрез m картички. Значи съществуват полиноми $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$, за които $\dfrac{P(n)}{Q(n)} = b \implies P(n) - bQ(n) = 0$, и освен това $\sigma(P) + \sigma(Q) \leq 2^m$. Ще докажем, че $P - bQ \equiv 0$, откъдето ще следва, че или $b = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$ (което ще означава, че изразът не е променил стойността си при замяна на n с a), или $Q(a) = 0$ (което ще значи, че изразът не е дефиниран заради деление на нула). Да допуснем противното и да запишем

$$(P - bQ)(x) = c_d x^d + \cdots + c_1 x + c_0$$

Сега (понеже $b < \frac{n}{2^m}$ е естествено число)

$$\sigma(P - bQ) \leq \sigma(P) + b\sigma(Q) = (1 - b)\sigma(P) + b(\sigma(P) + \sigma(Q)) < n,$$

откъдето $\sum_{i=0}^{d-1} |c_i| < n - 1$, тъй като и $c_d \neq 0$. Обаче $\left|\sum_{i=0}^{d-1} c_i n^i\right| = \left|c_d n^d\right| \geq n^d$, а същевременно

$$\left|\sum_{i=0}^{d-1} c_i n^i\right| \leq \sum_{i=0}^{d-1} |c_i| n^i \leq \left(\sum_{i=0}^{d-1} |c_i|\right)\left(\sum_{i=0}^{d-1} n^i\right) < (n-1)\frac{n^d - 1}{n - 1} < n^d,$$

което е противоречие. Значи $P - bQ \equiv 0$, което завършва решението.

Оценяване. 8 т. за доказване на твърдението с $\sigma(P)+\sigma(Q) \leq 2^k$ (при непълно доказателство се дават 2 т. за правилна формулировка), 2 т. за $|\sum_{i=0}^{d-1} c_i n^i| < n^d$, 2 т. за довършване.

Задача 3. Даден е успоредник $ABCD$. Означаваме с ℓ_1 правата през D, успоредна на AC, и с ℓ_2 външната ъглополовяща на $\sphericalangle ACD$. Правите ℓ_1 и ℓ_2 се пресичат в E. Правите ℓ_1 и AB се пресичат в F, а правата ℓ_2 пресича вътрешната ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$ в X. Правата BX пресича описаната около триъгълника EFX окръжност за втори път в Y. Вътрешната ъглополовяща на $\sphericalangle ACD$ пресича описаната около триъгълника ACX окръжност за втори път в Z. Да се докаже, че четириъгълникът $DXYZ$ е вписан в окръжност.

Решение. (Първи начин) Да забележим, че $\sphericalangle AXC = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle CAB - \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle DCA) = 90^\circ$, тъй като AX и CX са съответно вътрешна и външна ъглополовяща на $\sphericalangle CAB$ и $\sphericalangle DCA$. Също така $\sphericalangle ZCX = 90^\circ$ понеже CZ и CX са вътрешна и външна ъглополовяща на $\sphericalangle DCA$. Понеже $ZCXA$ е вписан, това означава, че този четириъгълник е правоъгълник понеже $\sphericalangle ZCX = 90^\circ = \sphericalangle AXC$. Следва, че $DZBX$ е успоредник понеже пресечната точка на диагоналите му, точка O, е среда на AC, BD и XZ.

Нека $BC \cap \ell_1 = P$ и $CD \cap BY = Q$. От успоредностите имаме $\triangle FAD \cong \triangle DCP$, така че $DF = DP$. Също $\sphericalangle CZX = \sphericalangle ACZ = \sphericalangle ZCD \Longrightarrow XZ \parallel DQ$ и $DZ \parallel XQ$ понеже $DZBX$ е успоредник. Така $DZXQ$ е успоредник, значи $DQ = XZ = AC = DP$.

Понеже $DF = DP = DQ$, то D е центърът на описаната окръжност около $\triangle FPQ$. При хомотетия с център B и коефициент $\frac{1}{2}$, D отива в O, а F и P в A и C съответно. Следва, че Q отива в X, понеже O е центъра на описаната окръжност на $\triangle ACX$. Това означава, че $PQ \parallel XE$ понеже X и C са среди на BQ и BP. Обаче щом $FYXE$ е вписан, то от успоредността следва, че $FYQP$ също е вписан. Вече споменахме, че центърът на тази окръжност е D, така че $DY = DQ = XZ$, но също така $DZ \parallel XY$, откъдето $DXYZ$ е равнобедрен трапец (а не успоредник понеже $DQXZ$ е успоредник). С това задачата е решена.

(Втори начин) Нека T е петата на перпендикуляра от C към AB и P е е петата на перпендикуляра от Z към BX. Нека $O = AC \cap BD$. По аналогичен начин на първото решение намираме, че $AXCZ$ е правоъгълник, откъдето понеже $\sphericalangle ZPX = 90^\circ = \sphericalangle ATC$, то $APTXCZ$ е вписан. Също от $\sphericalangle TFE = \sphericalangle TAC = 180^\circ - \sphericalangle TXC = 180^\circ - \sphericalangle TXE$ следва че $ETXF$ е вписан. Тъй като $AB = CD = AF$, то $BF = 2BA$ и от степен на точка $BT \cdot BA = BP \cdot BX$, $BT \cdot BF = BX \cdot BY$. Сравнявайки двете уравнения получаваме $BY = 2BP$, т.е. P е средата на BY, откъдето $\triangle ZBY$ е равнобедрен със $ZB = ZY$. Обаче знаем, че $ZBXD$ е успоредник понеже O разполовява диагоналите му, така че имаме $\sphericalangle ZYX = 180^\circ - \sphericalangle ZBX = 180^\circ - \sphericalangle ZDX$, с което задачата е решена.

Оценяване. При първото решение: 2 т. за $DZBX$ – успоредник, 1 т. за свеждането (напр. с равнобедрен трапец) до $DY = XZ$, 1 т. за въвеждане на P, 1 т. за въвеждане на Q, 2 т. за $DP = DQ = XZ$, 5 т. за $DQ = XZ$ (от които 1 т. за разглеждане на хомотетията). При второто решение: 1 т. за въвеждането на P, 1 т. за въвеждането на T, 1 т. за $APTXCZ$ – вписан, 2 т. за $ETXF$ – вписан, 4 т. за $BY = 2BP$, 2 т. за $ZB = ZY$, 1 т. за довършване.

Задача 4. На сватбата на българските национали по математика Вили и бате Любчо награда получи всеки гост, който назова естествено число n, все още неназовано от друг, което дели $3^n - 3$, но не дели $2^n - 2$. Ако гостите бяха безкраен брой, то щеше ли на теория да е необходимо младоженците да разполагат с безкраен брой подаръци?

Решение. Първо ще отбележим, че ако n се дели на 6, то 3 (а значи и n) не дели $2^n - 2$. Така всъщност е достатъчно да докажем, че има безбройно много естествени n, които се делят на 6 и делят $3^n - 3$.

За целта ще докажем с индукция по $k \geq 2$, че съществуват различни прости числа p_1, $p_2, \ldots, p_k$, такива че ако $n_k = p_1 p_2 \cdots p_k$, то n_k се дели на 6 и дели $3^{n_k} - 3$ и $3^{\frac{n_k}{p_k}} - 3 = 3^{n_{k-1}} - 3$. При $k = 2$ работят $p_1 = 2$ и $p_2 = 3$, понеже 6 дели $3^2 - 3 = 6$ и $3^6 - 3 = 6 \cdot 11^2$. За стъпката, нека p_{k+1} е прост делител на $3^{n_k - 1} - 1$, който не дели $3^m - 1$ за никое $m \leq n_k$ – такъв съществува напр. от теоремата на Жигмонди. Понеже $n_k - 1$ расте с растенето на k, от избора на p_{k+1} имаме $p_{k+1} \neq p_1, \ldots, p_k$. За $n_{k+1} = n_k p_{k+1}$ искаме да проверим, че n_{k+1} дели $3^{n_{k+1}} - 3 = 3(3^{n_k p_{k+1}-1} - 1)$ и $3^{\frac{n_{k+1}}{p_{k+1}}} - 3 = 3(3^{n_k - 1} - 1)$. Да отбележим, че показателят на 3 по модул p_{k+1} е равен на $n_k - 1$, в частност $n_k - 1$ дели $p_{k+1} - 1$.

Понеже p_{k+1} и n_k са взаимнопрости, ще проверим отделно, че p_{k+1} и n_k делят $3^{n_k-1} - 1$ и $3^{n_k p_{k+1}-1} - 1$. Но тъй като $n_k p_{k+1} - 1$ се дели на $n_k - 1$ (понеже $p_{k+1} \equiv 1 \pmod{n_k - 1}$), то всъщност е достатъчно да проверим, че p_{k+1} и n_k делят $3^{n_k-1} - 1$. Първото е вярно от дефиницията на p_{k+1}, а второто – от индукционното предположение. С това индукцията е завършена.

Оценяване. 7 т. за работеща контрукция, от които 1 т. за ограничението n да се дели на 6 (или на константа, която не дели $2^n - 2$ за съответните n) и 3 т. за опити с теоремата на Жигмонди, 5 т. за нейната проверка.

Задача 5. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, такива че

$$f(x) > x \quad \text{и} \quad f(x - y + xy + f(y)) = f(x + y) + xf(y)$$

за произволни положителни реални числа x и y.
Отговор. $f(x) = 2x$

Решение. Имаме $f(y) > y$ и значи $x - y + xy + f(y) > 0$ винаги. Да допуснем първо, че $f(y) < 2y$ за някое y. Тогава при x изпълняващо $x - y + xy + f(y) = x + y$, т.е. $x = \dfrac{2y - f(y)}{y}$, получаваме $xf(y) = 0$, невъзможно. Така $f(x) \geq 2x$ за всяко x.

Да разгледаме сега $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, зададена с $g(x) = f(x) - 2x$. Уравнението се преобразува до

$$g(x + y + xy + g(y)) = g(x + y) + (x - 2)g(y).$$

Явно $g \equiv 0$ (съответно $f(x) = 2x$) го изпълнява, ще докажем, че няма друго решение. Ако допуснем, че $g(a) = g(b)$ за някои $a \neq b$, то при $x = a$, $y = b$ и $x = b$, $y = a$ получаваме $(a - 2)g(b) = (b - 2)g(a)$, съответно $g(a) = g(b) = 0$. Сега $x = 2$ в уравнението дава $g(3y + 2 + g(y)) = g(y + 2)$ и значи (понеже $3y + 2 + g(y) \geq 3y + 2 > y + 2$ за $y > 0$) следва $g(y + 2) = 0$ за всяко y, т.е. $g(t) = 0$ за всяко $t > 2$. Оттук $x = 3$ в даденото води до $g \equiv 0$, както се искаше.

Оценяване. 1 т. за верен отговор и проверката му, 2 т. за доказване на $f(x) \geq 2x$, 1 т. за въвеждане на g, 4 т. за доказване, че ако $g(a) = g(b)$, то двете са нули (от които не повече от 1 т. за недовършени съображения около инективност), 2 т. за доказване, че $g(t) = 0$ за достатъчно големи t, 2 т. за довършване.

Задача 6. Да се докаже, че за някое естествено число N могат да се изберат N точки върху окръжност, такива че има поне $1000N^2$ ненаредени четворки (A, B, C, D) от различни избрани точки, за които $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$.

Решение. Да поставим числата 1, 2, …, n върху числовата ос. Достатъчно е да намерим $1000n^2$ ненаредени четворки $(A, B; C, D)$ в хармонично отношение, понеже с проектиране през точка P върху окръжност, непресичаща оста, от всяка такава четворка получаваме хармоничен четириъгълник.

Нека p е просто число и $k > p$ е естествено число, което не се дели на p. Тогава $(0, 2pk; p(p + k), k(p + k))$ е хармонична четворка и НОД$(2pk, p(p + k), k(p + k)) = 1$. С помощта на хомотетия и транслация получаваме четворките

$$(a, a + 2pk\ell; a + p(p + k)\ell, a + k(p + k)\ell)$$

като за всяка четворка има единствена възможност за a, p, k, ℓ поради взаимната простота. Да фиксираме k и нека a и ℓ се менят – имаме поне

$$\sum_{\ell=1}^{\left\lfloor \frac{n}{kp+k^2} \right\rfloor} (n - k(p+k)\ell) > \frac{n}{2}\left(\frac{n}{k(p+k)} - 1\right)$$

хармонични четворки; сега сумирайки през k, некратни на p, получаваме поне

$$H_p = \sum_{\substack{k=p+1 \\ (k,p)=1}}^{\left\lfloor \frac{\sqrt{p^2+4n}-p)}{2} \right\rfloor} \left(\frac{n^2}{2k(p+k)} - \frac{n}{2}\right)$$

хармонични четворки от простото число p. Пресмятаме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_p}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=p+1 \\ (k,p)=1}}^{\left\lfloor \frac{\sqrt{p^2+4n}-p)}{2} \right\rfloor} \left(\frac{1}{2k(p+k)} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \cdots + \frac{1}{2p-1}\right) > \frac{1}{5p}$$

откъдето $H_p > \frac{n^2}{10p}$ за достатъчно големи n. Сега от известния факт $\sum_p \frac{1}{p} = \infty$ следва, че $\sum_p H_p > cn^2$ за всяка константа $c > 0$ и достатъчно големи n, както се искаше.

Оценяване. 3 т. за свеждането до хармонични отношения за права с $1, 2, \ldots, N$; 2 т. за въвеждане на $(0, 2pk; p(p+k), k(p+k))$, 3 т. за подходяща долна граница, напр. H_p (може под формата на явна сума), 4 т. за довършване (от които 1 т. за полезно използване на $\sum_p \frac{1}{p} = \infty$).

Задача 7. Естествените числа от 1 до n са наредени в редица, първоначално в нарастващ ред. За един ход можем да разменим местата на две от числата, стига те да имат общ делител, по-голям от 1. Нека s_n е броят редици, които можем да получим с краен брой ходове. Да се докаже, че $s_n = a_n!$, където редицата от естествени числа $(a_n)_{n\geq 1}$ е такава, че за всяко $\delta > 0$ съществува естествено N, при което за всички $n \geq N$ е изпълнено двойното неравенство

$$n - \left(\frac{1}{2} + \delta\right)\frac{n}{\log n} < a_n < n - \left(\frac{1}{2} - \delta\right)\frac{n}{\log n}.$$

Решение. Простите числа, по-големи от $\frac{n}{2}$ и по-малки или равни на n, и числото 1 не могат да бъдат премествани, понеже няма друго число в редицата, което да има общ делител, по-голям от 1, с кое да е от тях. Ще докажем, че всяка пермутация на останалите числа е достижима.

Да предположим, че двойките размени (a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4) са възможни. Тогава от конкретна пермутация можем да получим такава, в която само a_1 и a_4 са разменени (и всяко друго число в пермутацията си стои на мястото) чрез последователно прилагане в този ред на размените (a_3, a_4), (a_2, a_3), (a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4).

Сега ще намерим подходяща верига от двойки между всеки две от гореспоменатите числа. Наистина, ако за такива x и y изберем прости делители d_x и d_y, по-малки от 30 (ако x е просто, то $d_x = x$ работи, а иначе избираме $d_x \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{n} \leq \frac{n}{2}$), то възможна верига е $(x, 2d_x)$, $(2d_x, 2d_y)$, $(2d_y, y)$ при $d_x \neq d_y$; а при $d_x = d_y$ е позволено веднага да разменим x и y.

Окончателно $s_n = \left(n - \pi(n) + \pi\left(\frac{n}{2}\right) - 1\right)!$, където за реално число t с $\pi(t)$ се означава броят на простите числа, ненадминаващи t. Остава да обосновем, че $\pi(n) - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + 1$ се намира между $\left(\frac{1}{2} \pm \delta\right)\frac{n}{\log n}$ за достатъчно големи n. От теоремата за простите числа имаме неравенствата (за всяко $\varepsilon > 0$ и големи n)

$$\frac{(1-\varepsilon)n}{\log n} < \pi(n) < \frac{(1+\varepsilon)n}{\log n}, \quad \frac{(1-\varepsilon)n}{2\log n} < \pi\left(\frac{n}{2}\right) < \frac{(1+\varepsilon)n}{2\log n}$$

(всъщност, директната оценка за $\frac{n}{2}$ е от вида $\frac{(1 \pm \varepsilon_0)n}{2\log\frac{n}{2}} = \frac{(1 \pm \varepsilon_0)n}{2\log n - 2\log 2}$, което се ограничава от $\frac{(1 \pm \varepsilon)n}{2\log n}$ за големи n). Оттук при дадено $\delta > 0$ имаме $\pi(n) - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + 1 > \frac{(1-\varepsilon)n}{2\log n} + 1 > \left(\frac{1}{2} - \delta\right)\frac{n}{\log n}$ за подходящо $\varepsilon > 0$ и достатъчно големи n (и аналогично отгоре), с което доказателството е завършено.

Оценяване. 9 т. за получаването на формулата за s_n, както следва: 1 т. за вярна формула, 1 т. за изолирането на 1 и всички прости над $\frac{n}{2}$ (точката не се присъжда, ако 1 е изпуснато), 1 т. за предположението, че всеки две от останалите числа могат да се разменят без да се сменят местата на другите, 2 т. за доказване, че при верига от три двойки (или от произволен брой двойки) може да се направи така, че само първото и последното число да се разменят, 4 т. за илюстриране на такава верига за всеки две от числата; 3 т. за оценката за a_n, от които 1 т. за споменаване на подходящо неравенство за брой прости числа и 2 т. за довършване.

Задача 8. Дадени са три купчини, първоначално с по 2000, 4000 и 4899 камъчета. Али и Баба играят следната игра, редувайки се, като Али започва първи. За един ход играчът може да избере две купчини и от едната да премести няколко камъчета в другата, стига обаче в края на хода купчината, от която мести, да има не по-малко камъчета от купчината, в която мести. Губи този който не може да направи ход. Има ли някой от играчите печеливша стратегия и ако да, кой?

Отговор. Али

Решение. Играта е крайна, например защото разликата между големините на най-голямата и най-малката купчина намаля при всеки ход. Ще докажем, че губещите позиции са точно тези от вида (x, x, y) (или пермутации), в които $x = y$ или $\nu_2(x-y)$ е четно число. (С $\nu_2(m)$ се означава най-голямото k, за което 2^k дели m.) Ако $x = y$, то ход не е възможен и играта приключва.

Да отбележим, че от губеща позиция няма как с един ход да се попадне в губеща, тъй като от (x, x, y) с $x \neq y$ евентуална с две равни купчини е само $\left(x, \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$, но първото изисква $\nu_2(x-y)$ да е четно, а второто – да е нечетно (понеже $\frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2} - x$).

Остава да докажем, че от печеливша позиция винаги има ход към губеща позиция. Да разгледаме печеливша позиция $(x, x+a, x+b)$, $0 \leq a \leq b$. Имаме следните случаи:

- Ако $a = 0$, то непременно $b > 0$ и $\nu_2(b)$ е нечетно и правим ход към $\left(x, x+\frac{b}{2}, x+\frac{b}{2}\right)$, като $\nu_2\left(\frac{b}{2}\right) = \nu_2(b) - 1$ е четно.

- Ако $a = b$, то непременно $b > 0$ и $\nu_2(b)$ е нечетно и правим ход към $\left(x + \frac{b}{2}, x + \frac{b}{2}, x + b\right)$, като $\nu_2\left(\frac{b}{2}\right) = \nu_2(b) - 1$ е четно.

- Нека $0 < a < b$, като $b = 2a$ или $\nu_2(b - 2a)$ е четно. Чрез най-голямата и най-малката купчина правим ход към $(x + a, x + a, x + b - a)$, което е губеща позиция.

- Нека $0 < a < b$, като $\nu_2(b - 2a)$ е нечетно. Непременно b е четно число и чрез най-голямата и най-малката купчина правим ход към $\left(x + \frac{b}{2}, x + a, x + \frac{b}{2}\right)$, което е губеща позиция.

Оценяване. 0 т. за верен отговор, 1 т. за обосновка, че играта е крайна, 3 т. за правилно описание на губещите и печелившите позиции, 2 т. за обосновка, че от губеща позиция винаги се стига до печеливша с един ход, 6 т. за обосновка, че от печеливша позиция може да се стигне до губеща с един ход, от които 1 т. за първия случай, 1 т. за втория случай, 2 т. за третия случай и 2 т. за четвъртия случай.