Тринадесети фестивал на младите математици

Созопол, 2024 г.

Четвърти кръг, Тема за 10 – 12 клас

Задача 1. Съществува ли полином $P(x, y)$ на две променливи с реални коефициенти, изпълняващ следните две условия:

- $P(x, y) = P(x, x - y) = P(y - x, y)$ за произволни реални числа x и y;
- Не съществува полином $Q(z)$ на една променлива с реални коефициенти, такъв че $P(x, y) = Q(x^2 - xy + y^2)$ за произволни реални числа x и y?

Задача 2. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с ортоцентър H, център на описаната окръжност O и среда M на страната BC. Правата AM пресича описаната окръжност около триъгълника BHC в точка K, като M е между A и K. Отсечките HK и BC се пресичат в точка N. Ако $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAN$, то да се докаже, че правите AN и OH са перпендикулярни.

Задача 3. Нека $(a_n)_{n\geq 1}$ е (не непременно строго) растяща редица от естествени числа, такава че $a_n \leq 1000n^{0.999}$ за всяко естествено число n. Да се докаже, че съществуват безбройно много естествени числа n, за които a_n дели n.

Задача 4. Нека $m > n$ са естествени числа. В държавата домакин на Международната олимпиада по информатика тази година има монети от по $1, 2, \ldots, n$ *александрии*, банкноти *лири*, всяка на стойност m александрии, и банкноти *фараони*, всяка на стойност $m + n$ александрии. Нека A е естествено число. Борис иска да обмени сума A чрез монети и лири, като използва не повече от $m - 1$ монети, а Веско иска да обмени сума A чрез монети и фараони, като използва не повече от m монети. Да се докаже, че без значение стойността на A, броят начини за всеки от двамата да изпълни желанието си е еднакъв.

Задача 5. Функцията $f : A \to A$ е такава, че $f(x) \leq x^2$ и $f(x + y) \leq f(x) + f(y) + 2xy$ за произволни $x, y \in A$.

а) Ако $A = \mathbb{R}$, да се намерят всички функции, изпълняващи условията.

б) Ако $A = \mathbb{R}^-$, да се докаже, че има безбройно много функции, изпълняващи условията. (*С* $\mathbb{R}^-$ *означаваме множеството на отрицателните реални числа.*)

Задача 6. Нека $P(x)$ е полином на една променлива с цели коефициенти. Да се докаже, че броят на двойките (m, n) от естествени числа, такива че $2^n + P(n) = m!$, е краен.

Задача 7. Нека P е произволна точка от вписаната в триъгълника ABC окръжност k с център I, различна от допирните точки със страните му. Допирателната към k в P пресича правите BC, AC, AB в точките A_0, B_0, C_0, съответно. Правите през A_0, B_0, C_0, успоредни съответно на ъглополовящите на ъглите $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$, образуват триъгълник Δ. Да се докаже, че правата PI се допира до описаната окръжност около Δ.

Задача 8. Нека $n \geq 2$ е естествено число. На състезание по математика има $n+1$ ученици, като един от тях е хакер. Състезанието се провежда по следния начин – всеки получава една и съща задача с отворен отговор, има 5 минути да даде свой отговор, след което всички предават едновременно, обявява се верния отговор, после получават нова задача и т.н. Хакерът мами, като на всяка задача може (с шпионски камери) да види отговора на всеки от останалите участници. Верен отговор носи 1 точка, а грешен отговор носи -1 точка за всички без хакера; за него е 0 точки, понеже е успял да хакне електронната система за оценяване. Да се докаже, че без значение какъв е общият брой задачи, ако в някой момент хакерът е пред втория в класирането с поне $2^{n-2} + 1$ точки, то той има стратегия, с която със сигурност в края на състезанието ще е едноличен победител.