Дванадесети фестивал на младите математици

Созопол, 2024 г.

Четвърти кръг, Тема за 10 – 12 клас

Р Е Ш Е Н И Я

Задача 1. Съществува ли полином $P(x,y)$ на две променливи с реални коефициенти, изпълняващ следните две свойства:

- $P(x,y) = P(x,x-y) = P(y-x,y)$ за произволни реални числа x и y;
- Не съществува полином $Q(z)$ на една променлива с реални коефициенти, такъв че $P(x,y) = Q(x^2-xy+y^2)$ за произволни реални числа x и y?

Решение. (Първи начин) Да! Ще докажем, че $P(x,y) = x^6+y^6+(x-y)^6$ върши работа. За първото условие, имаме $P(x,x-y) = x^6+(x-y)^6+(x-(x-y))^6 = x^6+y^6+(x-y)^6 = P(x,y)$ и $P(y-x,y) = (y-x)^6+y^6+((y-x)-y)^6 = x^6+y^6+(x-y)^6$. За второто, от $y=0$ следва $Q(x^2) = 2x^6$ и значи (понеже x^2 приема безбройно много стойности) $Q(z) = 2z^3$ за всяко реално z. Но тогава непременно $x^6+y^6+(x-y)^6 = 2(x^2-xy+y^2)^3$, което е невярно напр. при $x=2$, $y=1$ (двете страни са съответно 66 и 54).

(Втори начин, Никола Гюлев) Да, например $P(x,y) = xy(x-y)$ върши работа.

Коментар. Имаме $x^2+y^2+(x-y)^2 = 2(x^2-xy+y^2)$ и $x^4+y^4+(x-y)^4 = 2(x^2-xy+y^2)^2$. При аналогична ситуация за три (или повече) променливи първото условие гарантира съществуването на Q, вж. Шортлист МОМ 2019 А6. Друг известен полином (от МОМ 1982 и ЕМТ 8 клас) е $R(x,y) = x^3-3xy^2+y^3$, но при него $R(x,y) = R(y-x,-x) = R(-y,x-y)$.

Оценяване. 8 т. за работещ пример, по 2 т. за пълна проверка на всяко от двете условия; при липса на пример се дават 3 т. за разглеждане на клас от полиноми, зависещ от най-много два параметъра, в който при конкретна стойност на параметрите се получава работещ пример.

Задача 2. Даден е остроъгълен триъгълник ABC ($AB \neq AC$) с ортоцентър H, център на описаната окръжност O и среда M на страната BC. Правата AM пресича описаната окръжност около триъгълника BHC в точка K, като M е между A и K. Отсечките HK и BC се пресичат в точка N. Ако $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAN$, то да се докаже, че правите AN и OH са перпендикулярни.

Решение. Ще използваме стандартни означения за ъглите на ABC. Имаме $\sphericalangle BKC = 189^\circ - \sphericalangle BHC = \alpha$, а освен това K лежи на медианата AM на ABC. Следователно $ABKC$ е успоредник. Да означим с D втората пресечна точка на AN с описаната около ABC окръжност. Предвид условието $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAN$, явно AD е симедианата през A в ABC, откъдето $ABDC$ е хармоничен четириъгълник. Така допирателните в точките A и D към окръжността на ABC се пресичат върху BC, да речем в точка L. Имаме $OL \perp AN$ (всъщност OL е симетралата на AN) и $(B,C;N,L) = -1$. Понеже M е среда на BC, а $BHCK$ е вписан, получаваме

$$LN \cdot NM = BN \cdot NC = HN \cdot NK,$$

откъдето $LHMK$ е вписан. Да означим $\sphericalangle BAN = \sphericalangle CAM = \varphi$. Имаме

$$\sphericalangle HLM = \sphericalangle HKM = \sphericalangle BKM = \sphericalangle BKH = \sphericalangle CAM - \sphericalangle BCH = \varphi + \beta - 90^\circ$$

и $\sphericalangle ANB = 180^\circ - \beta - \varphi$, откъдето $AN \perp HL$. Следователно $\overline{OHL} \perp AN$, с което решението е завършено.

Оценяване. 1 т. за $ABKC$ – успоредник, 1 т. за въвеждането на D, 1 т. за $ABDC$ – хармоничен, 1 т. за въвеждането на L, 1 т. за предположението, че O, H и L лежат на една права (която трябва да се окаже перпендикулярна на AN), 1 т. за $(B, C; N, L) = -1$, 4 т. за $LHMK$ – вписан, 2 т. за довършване.

Задача 3. Нека $(a_n)_{n\geq 1}$ е (не непременно строго) растяща редица от естествени числа, такава че $a_n \leq 1000n^{0.999}$ за всяко естествено число n. Да се докаже, че съществуват безбройно много естествени числа n, за които a_n дели n.

Решение. Ще докажем по-силното твърдение, че $\dfrac{n}{a_n}$ може да бъде равно на всяко естествено k. Разглеждаме $ka_n - n$: за $n = 1$ то е $ka_1 - 1 \geq 0$, за $n > (1000k)^{1000}$ то е отрицателно, а от монотонността на a_n следва, че $ka_n - n$ намаля най-много с 1 когато n се замени с $n + 1$. Така със сигурност в някой момент $ka_n = n$.

Коментар. По същия начин се доказва, с помощта на теоремата за простите числа, че частното $\dfrac{n}{\pi(n)}$ може да бъде равно на всяко естествено число, по-голямо или равно на 2, където $\pi(n)$ е броят на простите числа, по-малки или равни на n.

Оценяване. 2 т. за предположението, че $\dfrac{n}{a_n}$ приема всяка стойност, 3 т. за въвеждане на $ka_n - n$, 2 т. за проверка, че е отрицателно за големи n, 2 т. за проверка, че намаля най-много с 1, 3 т. за довършване.

Задача 4. Нека $m > n$ са естествени числа. В държавата домакин на Международната олимпиада по информатика тази година има монети от по $1, 2, \ldots, n$ *александрии*, банкноти *лири*, всяка на стойност m александрии, и банкноти *фараони*, всяка на стойност $m + n$ александрии. Нека A е естествено число. Борис иска да обмени сума A чрез монети и лири, като използва не повече от $m - 1$ монети, а Веско иска да обмени сума A чрез монети и фараони, като използва не повече от m монети. Да се докаже, че без значение стойността на A, броят начини за всеки от двамата да изпълни желанието си е еднакъв.

Решение. (Първи начин, биекция) Ще покажем съответствие между разбиванията от двата вида.

Започваме от произволен набор от монети и лири. На всяка стъпка правим следното:

- Ако в текущите пари има монета на стойност n и банкнота на стойност m, ги махаме и на тяхно място слагаме червена банкнота със стойност $m + n$.

- Ако в текущите пари има банкнота със стойност m, но не и монета със стойност n, премахваме тази банкнота и вместо това добавяме по 1 към стойността на всяка монета, като ако е необходимо добавяме още няколко нови монети със стойност 1 така, че общата сума се запазва и в края има не повече от m монети.

- Ако в парите няма банкнота със стойност m, алгоритъмът приключва.

Сега ще представим обратния алгоритъм. Започваме от съвкупност от банкноти със стойност $m+n$ и монети. Във всеки момент:

- Ако има точно m монети, то от всяка от техните стойности вадим 1 и вместо това добавяме банкнота със стойност m.
- Ако има по-малко от m монети, но има и банкнота на стойност $m+n$, я взимаме и вместо нея слагаме една монета на стойност n и една банкнота със стойност m.
- Ако има по-малко от m монети и няма банкнота на стойност $m+n$, алгоритъмът приключва.

(Втори начин, пораждащи функции) Нека $\mathcal{C}$ е съвкупността, съдържаща безбройно много 1-ци, 2-ки и т.н. до n. Тогава $\sum_{A\subset\mathcal{C},|A|\le N} x^{S(A)}$ е пораждащата функция, съответстваща на сумите от монетите $1,\ldots,N$ (където $N\le m$). Достатъчно е да докажем, че

$$(1+x^m+x^{2m}+\ldots)\sum_{A\subset\mathcal{C},|A|<m} x^{S(A)} = (1+x^{m+n}+x^{2(m+n)}+\ldots)\sum_{B\subset\mathcal{C},|B|\le m} x^{S(B)}$$

$$\iff \sum_{A\subset\mathcal{C},|A|<m} x^{S(A)+m+n} + \sum_{|B|=m} x^{S(B)} = \sum_{B\subset\mathcal{C},|B|\le m} x^{S(B)+m}.$$

И наистина, първата сума съответства на събираемите в третата, чиито множества съдържат n, а във всяко множество във втората сума намаляме елементите му с 1 и получаваме остатъка от третата сума.

Оценяване. При подход с биекция: по 6 т. за всяка от двете посоки. При подход с пораждаща функция: 2 т. за въвеждане на подходяща такава, 4 т. за свеждане до доказването на еквивалентно (на комбинаторната ситуация) тъждество на една променлива, 6 т. за доказването му.

Задача 5. Функцията $f : A \to A$ е такава, че $f(x)\le x^2$ и $f(x+y)\le f(x)+f(y)+2xy$ за произволни $x,y\in A$.
а) Ако $A=\mathbb{R}$, да се намерят всички функции, изпълняващи условията.
б) Ако $A=\mathbb{R}^-$, да се докаже, че има безбройно много функции, изпълняващи условията.
(*С* $\mathbb{R}^-$ *означаваме множеството на отрицателните реални числа.*)

Решение. а) При $x=y=0$ получаваме от дадените съответно $f(0)\le 0$ и $f(0)\ge 0$, значи $f(0)=0$. Да допуснем, че $f(x)<x^2$ за някое x. От първото от дадените имаме $f(-x)\le x^2$, значи при $y=-x$ във второто следва

$$0=f(0)\le f(x)+f(-x)-2x^2 < x^2+x^2-2x^2=0$$

противоречие. Следователно $f(x)\ge x^2$ за всяко x и с първото от дадените заключаваме, че $f(x)=x^2$ за всяко x. Тази функция работи – желаните неравенства са всъщност равенства.

б) Да изберем $f(x)=\alpha x^2$ за произволно $\alpha<0$, явно $f(x)<0$ за $x<0$. Неравенството $f(x)\le x^2$ е вярно поради $\alpha\le 1$ и $x^2\ge 0$. Неравенството $f(x+y)\le f(x)+f(y)+2xy$ е еквивалентно на $2xy(\alpha-1)\le 0$, което е вярно за $x<0$, $y<0$ и $\alpha\le 1$.

Коментар. При $A=\mathbb{R}^+$ работят функциите αx^2 за $\alpha\in(0,1]$ и $\dfrac{x^2}{x+c}$ за $c\ge 1$.

Оценяване. 4 т. за а), от които 1 т. за верен отговор и проверката му, 1 т. за получаване на $f(0)=0$, 1 т. разглеждане на $y=-x$ и 1 т. за довършване; 8 т. за б), от които 4 т. за работеща конструкция и 4 т. за пълна проверка

Задача 6. Нека $P(x)$ е полином на една променлива с цели коефициенти. Да се докаже, че броят на двойките (m,n) от естествени числа, такива че $2^n+P(n)=m!$, е краен.

Решение. Да допуснем противното. Понеже за всяко n има най-много едно възможно m, необходимо е множеството от възможните n да е неограничено. Поне две от 2^n, $P(n)$ и $m!$ трябва да имат една и съща степен на двойката (иначе ако трите са различни и 2^A е най-малката, то равенството е невъзможно по модул 2^{A+1}). Нека P е от степен $d\geq 0$ (ако $P\equiv 0$, то $n\geq 2$ е невъзможно по модул 3).

- Ако 2^n и $P(n)$ са с една и съща степен на 2, то всъщност $P(n)$ се дели на 2^n, съответно $n^{d+1}\geq |P(n)|\geq 2^n$ за достатъчно големи n, което е невярно (позволяваме обратното неравенство да се използва без доказателство, а иначе един начин за обосноваването му е чрез логаритмуване и $\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ от правилото на Лопитал).

- Ако 2^n и $m!$ са с една и съща степен на 2, то тъй като от формулата на Льожандър

$$\nu_2(m!)=\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{m}{2^i}\right\rfloor\leq\sum_{i=1}^{\infty}\frac{m}{2^i}=m$$

  то $m\geq n$. Обаче $P(n)\leq n^{d+1}\leq 2^n$ за достатъчно големи n, значи непременно $2^{n+1}\geq 2^n+P(n)=m!\geq n!$, невярно за $n\geq 5$ по индукция ($120>64$ и $n+1>2$).

- Нека $P(n)$ и $m!$ са с една и съща степен на 2. От формулата на Льожандър тази степен е поне $\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\geq\frac{m-1}{2}$, съответно $|P(n)|\geq 2^{\frac{m-1}{2}}$. Използваме $|P(n)|\leq n^{d+1}$ за големи n, така $n\geq 2^{\frac{m-1}{2(d+1)}}$. Обаче $P(n)\geq -2^{n-1}$ за големи n, значи непременно

$$m!=2^n+P(n)\geq 2^{n-1}\geq 2^{2^{\frac{m-1}{2(d+1)}}-1}.$$

  (Тук в частност $m!\geq 2^{n-1}$ дава, че множеството от възможности за m също трябва да е неограничено.) От друга страна, имаме $m!\leq m^m$, откъдето непременно

$$m\log_2 m\geq 2^{\frac{m-1}{2(d+1)}}-1$$

  и значи (за големи m) $m^2>2^{\frac{m-1}{4(d+1)}}$, т.е. $m^{8(d+1)}>2^{m-1}$, което е невъзможно.

Оценяване. 2 т. за идеята да се работи спрямо кои от 2^n, $P(n)$ и $m!$ имат равни степени на двойката, 1 т. за отхвърляне на 2^n с $P(n)$, 3 т. за отхвърляне на 2^n с $m!$, 6 т. за отхвърляне на $P(n)$ с $m!$, от които 3 т. за неравенство от вида $m!\geq 2^{2^{Cm}}$ и 3 т. за довършване. Отнема се 1 т. ако е пропуснат случая $P\equiv 0$ (или $P\equiv \mathrm{const}$) и аргументът го изисква (но точката не се присъжда при присъствието му).

Задача 7. Нека P е произволна точка от вписаната в триъгълника ABC окръжност k с център I, различна от допирните точки със страните му. Допирателната към k в P пресича правите BC, AC, AB в точките A_0, B_0, C_0, съответно. Правите през A_0, B_0, C_0, успоредни съответно на ъглополовящите на ъглите $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$, образуват триъгълник Δ. Да се докаже, че правата PI се допира до описаната окръжност около Δ.

Решение. Нека ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c са правите, съдържащи страните на Δ (като $A_0 \in \ell_a$ и т.н.). Ще използваме стандартни означения за ъглите на ABC. Нека $\ell_b \cap \ell_c = X, \ell_a \cap \ell_c = Y, \ell_a \cap \ell_b = Z$. Също така нека D, E, F са допирните точки на ω с BC, CA, AB. Ще покажем, че допирната точка на PI с окръжността на XYZ е точка W, за която са изпълнени следните твърдения:

- $XW \parallel DP$, $YW \parallel EP$, $ZW \parallel FP$;
- $PI = PW$.

Нека t_x е правата през X, успоредна на PD, също t_y е правата през Y, успоредна на PE и t_z е правата през Z, успоредна на PF. Дефинираме $t_x \cap t_y = W$ (и ще докажем, че W изпълнява гореспоменатите). Имаме

$$\sphericalangle XWY = \sphericalangle DPE = \sphericalangle DFE = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$$

(първите два ъгъла са с взаимно успоредни рамене). От друга страна, $\sphericalangle XZY = \sphericalangle (XZ, ZY) = \sphericalangle (BI, AI) = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ и значи $\sphericalangle XZY = \sphericalangle XWY$, т.е. $XYZW$ е вписан и $W \in (XYZ)$. Така получихме, че $t_x \cap t_y \in (XYZ)$; аналогично $t_x \cap t_z \in (XYZ)$ и значи t_x, t_y, t_z се пресичат W върху (XYZ).

Сега ще покажем, че $W \in PI$. Нещо повече, ще покажем, че W е симетричната на I спрямо P. Да разгледаме хомотетия с център I и коефициент $\frac{1}{2}$. При това ще искаме да докажем, че правата t_x се изпраща в нейната успоредна PD. Това ще означава, че t_x, t_y, t_z пресичат PI във фиксирана точка (симетричната на I спрямо P) и тъй като $t_x \cap t_y \cap t_z = W$, ще следва $W \in PI$.

Нека M и N са средите на C_0I и B_0I, съответно. При хомотетията с център I и коефициент $\frac{1}{2}$ точка X се изпраща в пресечната на правата през M, успоредна на CI, и правата през N, успоредна на BI – нека тази пресечна точка е X'. Достатъчно е да докажем, че $X' \in PD$. Да забележим, че $MI = MC_0 = MP, NI = NB_0 = NP$, т.е. $\triangle MIN \cong \triangle MPN$ и $\sphericalangle MX'N = \sphericalangle BIC = 180^\circ - \sphericalangle B_0IC_0 = 180^\circ - \sphericalangle MPN$, значи $MX'NP$ е вписан. Сега обаче $180^\circ - \sphericalangle DX'N = \sphericalangle (DP, X'N) = \sphericalangle (DP, BI) = 180^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle CBC_0 - \sphericalangle BDP = 180^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle CBC_0 - (180^\circ - \sphericalangle PDC) = \sphericalangle PDC - \frac{1}{2} \sphericalangle CBC_0 = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle BA_0C_0) - \frac{1}{2} \sphericalangle CBC_0 = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle BA_0C_0 - \sphericalangle CBC_0) = \frac{1}{2} \sphericalangle BC_0B_0 = \sphericalangle IC_0P = \sphericalangle MPC_0 = \sphericalangle PMN = \sphericalangle PX'N$, следователно P, X', D са колинеарни, значи t_x се изпраща в PD при хомотетията и наистина W принадлежи едновременно на $PI, t_x, t_y, t_z, (XYZ)$.

Остава да докажем, че W е търсената допирна точка. Нека O_1 е центърът на (XYZ). Тогава $\sphericalangle O_1XY = 180^\circ - \sphericalangle XZY = 90^\circ - (90^\circ - \frac{\gamma}{2}) = \frac{\gamma}{2} = \sphericalangle (XY, BC)$, значи $O_1X \parallel BC$; аналогично $O_1Y \parallel AC$ и $O_1Z \parallel AB$. Сега $\sphericalangle PDA_0 = \sphericalangle WXO_1$ и тъй като триъгълниците O_1WX и A_0PD са равнобедрени с равни ъгли при основите, те са подобни и значи понеже $PD \parallel WX, DA_0 \parallel XO_1$, то следва $WO_1 \parallel PA_0$. Но $PA_0 \perp IW$, откъдето $WO_1 \perp IW$ и значи (XYZ) се допира до PI в W, както се искаше.

Коментар. Някои от горните стъпки могат да се опишат с детайли за точка на Микел или въртяща хомотетия.

Оценяване. По 1 т. за предполагане на всяко от двете свойства на W, 2 т. за доказване, че W лежи на окръжността около (XYZ), 3 т. за доказване, че W лежи на PI, 2 т. за доказване, че $PI = PW$, 3 т. за довършване.

Задача 8. Нека $n \geq 2$ е естествено число. На състезание по математика има $n+1$ ученици, като един от тях е хакер. Състезанието се провежда по следния начин – всеки получава една и съща задача с отворен отговор, има 5 минути да даде свой отговор, след което всички предават едновременно, обявява се верния отговор, после получават нова задача и т.н. Хакерът мами, като на всяка задача може (с шпионски камери) да види отговора на всеки от останалите участници. Верен отговор носи 1 точка, а грешен отговор носи -1 точка за всички без хакера; за него е 0 точки, понеже е успял да хакне електронната система за оценяване. Да се докаже, че без значение какъв е общият брой задачи, ако в някой момент хакерът е пред втория в класирането с поне $2^{n-2}+1$ точки, то той има стратегия, с която със сигурност в края на състезанието ще е едноличен победител.

Решение. Без ограничение считаме, че всички освен хакера започват с 0 точки (и тези на хакера са поне $2^{n-2}+1$). Можем да игнорираме рундовете, в които всички отговори са еднакви, както и рундовете, в които хакерът дава правилния отговор, тъй като това го оставя поне толкова добре, колкото преди – с други думи, ще предположим, че резултатът на хакера не се променя, но и че той може да избере всяка група хора със същите отговори, които да загубят 1 точка, докато друга група печели 1 точка.

Ключовото наблюдение е следното. Нека R_1 и R_2 са два рунда, такива че в R_1 участниците от някое множество S печелят точка, а в R_2 всички участници от S имат един и същи отговор. Тогава, ако копираме отговорите на участниците от S по време на R_2, то общият сбор на точките в R_1 и R_2 е 0. Така можем да игнорираме R_1 и R_2.

Сега ще опишем възможна стратегия. Ще обновяваме списък $\mathcal{L}$ от подмножества на $\{1, \ldots, n\}$, първоначално празен.

- В даден рунд, ако съществува множество S от хора с еднакъв отговор, такова че $S \in \mathcal{L}$, копираме отговора на S, което причинява те да загубят точка. Изтриваме S от $\mathcal{L}$. (Не добавяме нови множества към $\mathcal{L}$.)

- В противен случай копираме някое множество T от участници, като избираме $|T| \geq \frac{n}{2}$, ако е възможно. Нека S е множеството от участници, които отговарят правилно (ако такива има), и добавяме S към списъка $\mathcal{L}$. Да забележим, че $|S| \leq \frac{n}{2}$, тъй като S и T нямат общи елементи.

По построение, в $\mathcal{L}$ няма повтарящи се множества. Следователно точките на всеки участник c са ограничени отгоре от броя пъти, в които c се появява сред множествата в $\mathcal{L}$. Броят на тези множества не надминава $\frac{1}{2} \cdot 2^{n-1}$. Следователно, ако хакерът води с $2^{n-2}+1$ точки, то си е осигурил победа.

Оценяване. 8 т. за работеща стратегия и 4 т. за нейната проверка; при показаното решение точките за стратегията са както следва: 1 т. за игнориране на рундовете с еднакви отговори или верни за хакера, 3 за наблюдението за R_1 и R_2, 4 т. за явното описание.