Тринадесети фестивал на младите математици

Созопол, 2024 г.

Финал, Тема за 10 – 12 клас

Задача 1. Нека $n \geq 2$ е естествено число. Да се намерят всички n-орки $(a_1, \ldots, a_n)$ от комплексни числа, за които числата $a_1 - 2a_2$, $a_2 - 2a_3$, $\ldots$, $a_{n-1} - 2a_n$, $a_n - 2a_1$ образуват пермутация на числата $a_1, \ldots, a_n$.

Задача 2. Нека $p \neq 3$ е просто число. Да се докаже, че съществуват естествени числа a, b, c, d, които не се делят на p и такива че $a^2 + 3b^5 + 5c^6 + 7d^7$ се дели на p^{1000}.

Задача 3. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, такива че

$$f(x + f(y) - 2y) + f(f(y)) = f(x)$$

за произволни цели числа x и y.

Задача 4. Диагоналите AD, BE и CF на вписания в окръжност k шестоъгълник $ABCDEF$ се пресичат в една точка P и острият ъгъл между всеки два от тях е с мярка $60°$. Нека r_{AB} е радиусът на окръжността, допираща се до отсечките PA и PB и вътрешно до k; радиусите r_{BC}, r_{CD}, r_{DE}, r_{EF} и r_{FA} се дефинират аналогично. Да се докаже, че

$$r_{AB}r_{CD} + r_{CD}r_{EF} + r_{EF}r_{AB} = r_{BC}r_{DE} + r_{DE}r_{FA} + r_{FA}r_{BC}.$$

Задача 5. Дадена е безкрайна в двете посоки мрежа, разделена на единични квадратчета, с два реда и безкраен брой колони. Едно от полетата на втория ред е оцветено в червено, а всички други в мрежата са бели. В началото се намираме в червеното поле. За един ход можем да се преместим от поле в друго съседно по страна поле. Да се намери броя на редиците от n хода, при които никое поле не е посещавано повече от веднъж. (В частност, не е позволено след няколко хода отново да се намираме в червеното поле.)

Задача 6. Естествените числа a, b, c, d са такива, че $(a + c)(b + d) = (ab - cd)^2$. Да се докаже, че $4ad + 1$ и $4bc + 1$ са точни квадрати на естествени числа.

Задача 7. Даден е краен неориентиран граф, в който всяко ребро принадлежи на най-много три цикъла. Да се докаже, че върховете му могат да се оцветят в три цвята така, че всеки два върха, свързани с ребро, са в различен цвят.
(*Цикъл в граф е редица от различни върхове $v_1, v_2, \ldots, v_k$, $k \geq 3$, такива че v_iv_{i+1} е ребро за всяко $i = 1, 2, \ldots, k$; считаме $v_{k+1} = v_1$. Ребрата v_iv_{i+1} принадлежат на цикъла.*)

Задача 8. В пространството са дадени 13 точки, никои четири от които не лежат в една равнина. Три от точките са оцветени в синьо и триъгълникът с върхове тези точки ще наричаме *син*. Останалите 10 точки са оцветени в червено. Ще казваме, че триъгълник с три червени върха е *закачен* за синия триъгълник, ако границата на червения пресича синия (във вътрешността или по границата му) в единствена точка. Възможно ли е броят на закачените триъгълници да е 33?