Тринадесети фестивал на младите математици

Созопол, 2024 г.

Финал, Тема за 10 – 12 клас

Р Е Ш Е Н И Я

Задача 1. Нека $n \geq 2$ е естествено число. Да се намерят всички n-орки $(a_1, \ldots, a_n)$ от комплексни числа, за които числата $a_1 - 2a_2$, $a_2 - 2a_3$, $\ldots$, $a_{n-1} - 2a_n$, $a_n - 2a_1$ образуват пермутация на числата $a_1, \ldots, a_n$.

Отговор. $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

Решение. Явно $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ е решение, ще докажем, че друго няма. Желаното е еквивалентно на система линейни уравнения с рационални (даже цели) коефициенти над комплексните числа. Такава система има решение над комплексните числа тогава и само тогава когато има решение над рационалните числа (в частност, над реалните числа). Наистина, решенията на системата се получават чрез свеждане до уравнение с рационални коефициенти (понеже се използват само четирите основни операции) и ако то има решение, то ще има и рационално такова. (Алтернативен начин да сведем до реални числа е като съобразим, че ако исканото е вярно за a_i, то е вярно и за реалните им части.)

Нека a_k е с максимален модул измежду всички. От неравенството на триъгълника имаме $|a_{k-1} - 2a_k| \geq ||a_{k-1}| - 2|a_k|| = 2|a_k| - |a_{k-1}| \geq |a_k|$. Понеже $|a_k| \geq |a_{k-1} - 2a_k|$ от максималността, непременно равенство се достига навсякъде в горните неравенства. Така $|a_k| = |a_{k-1}|$, като при $a_k = -a_{k-1}$ следва невярното $3|a_k| = |a_{k-1} - 2a_k| = ||a_{k-1}| - 2|a_k|| = |a_k|$ (освен ако не са нули, в частност $a_k = a_{k-1}$) – значи можем да считаме, че $a_k = a_{k-1}$. Прилагайки същият аргумент за $k-1$ вместо k, после за $k-2$ и т.н., получаваме, че всички числа са равни. Остава да отбележим, че $(a, a, \ldots, a)$ е пермутация на $(-a, -a, \ldots, -a)$ само при $a = 0$.

Оценяване. 5 т. за свеждане на задачата до реални числа, 5 т. за решаване върху реалните числа, както следва: 1 т. за разглеждане на числото с максимален модул, 2 т. за доказване, че предното число има същия модул, 1 т. за доказване, че двете числа са равни, 1 т. за довършване. (В частност, всяко непълно решение се оценява с до 9 т.)

Задача 2. Нека $p \neq 3$ е просто число. Да се докаже, че съществуват естествени числа a, b, c, d, които не се делят на p и такива че $a^2 + 3b^5 + 5c^6 + 7d^7$ се дели на p^{1000}.

Решение. (Първи начин) Да отбележим, че броят ненулеви стойности на $x^k \pmod p$ е поне $\frac{p-1}{k}$, тъй като при примитивен корен g сравнението $g^{kt} \equiv 1 \pmod p$ е еквивалентно на $kt \equiv 0 \pmod{p-1}$, т.е. на $\frac{kt}{(k,p-1)} \equiv 0 \pmod{\frac{p-1}{(k,p-1)}}$, значи на $t \equiv 0 \pmod{\frac{p-1}{(k,p-1)}}$, съответно числата g, g^2, $\ldots$, g^t за $t = \frac{p-1}{(k,p-1)} \geq \frac{p-1}{k}$ са различни. Също, този брой не се променя ако умножим x^k с константа, неделяща се на p (понеже $cA \equiv cB \pmod p$ за $(c,p) = 1$ е еквивалентно на $A \equiv B \pmod p$).

Следователно за $p \geq 11$ броят на възможните стойности за $f(a,b,c,d) = a^2 + 3b^5 + 5c^6 + 7d^7$ е поне $\frac{p-1}{2} + \frac{p-1}{5} + \frac{p-1}{6} + \frac{p-1}{7} - 4 + 1 = \frac{106}{105}(p-1) - 3$ от теоремата на Коши-Девенпорт. За $p \geq 421$ последното е поне колкото p, в частност има (a_0, b_0, c_0, d_0), некратни на p, с $f(a_0, b_0, c_0, d_0) \equiv 0 \pmod p$. Понеже производната на A относно a е $2a$ и не се дели на p при $a = a_0$, то от лемата на Хензел автоматично имаме решение по модул p^n за всяко n.

Възможна подобна стратегия за простите $p < 421$ е както следва: намираме на ръка решение (a_0, b_0, c_0, d_0) (некратни на p) на $f(a, b, c, d) \equiv 0 \pmod p$, такова че производната на f относно поне една от променливите не се дели на p – ако това се случи, то автоматично получаваме решение по модул p^n от лемата на Хензел. За някои p това ще го приложим директно, но с цел драстично да намалим проверките, нека се върнем на наблюденията от първия абзац. По-точно, ако НОД$(p-1, k) = 1$, то x^k приема всички ненулеви възможни стойности по модул p (понеже тогава $t = p-1$ при горните означения), значи общо имаме (ако някое от $k = 5, 6, 7$ изпълнява това) поне $\frac{p-1}{2} + p - 1 > p$ възможни стойности на f. Нещо повече, коефициентите на производната относно коя да е от променливите нямат прост делител, надвишаващ 7, така че прилагането на лемата на Хензел ограничава само до необходимостта от $p \geq 11$.

И така, $k = 5$ покрива всички прости числа $p \geq 11$ освен тези от вида $p \equiv 1 \pmod 5$, а $k = 7$ – всички освен $p \equiv 1 \pmod 7$. Значи остава да дадем конкретни решения за $p = 2, 5, 7, 71, 211, 281$. При $p = 2$ работи $a = b = c = d = 1$ (и прилагаме Хензел относно b, производната е $15 \equiv 1 \pmod 2$)). При останалите p винаги прилагаме Хензел относно a. При $p = 5$ работи $a = b = c = 1$ и $d = 2$; при $p = 7$ работи $a = c = d = 1$ и $b = 3$; при $p = 71$ работи $a = 18$, $b = 3$, $c = d = 1$; при $p = 211$ работи $a = 14$, $b = c = d = 1$; при $p = 281$ работи $a = 90$, $c = 2$, $b = d = 1$. (При избиране на малки b, c, d вместо търсене на конкретното a може да се провери дали $-(3b^5 + 5c^6 + 7c^7)$ е квадратичен остатък по модул p чрез разлагането му на множители и прилагане на правилото на двойката и закона за реципрочност. За случаите $p = 71, 281$ е възможна и аргументация чрез подобряване на оценката от първия абзац, понеже 70 и 280 не се делят ня 3.)

(Втори начин, Божидар Димитров) Ще действаме като в първото решение, но с по-прости детайли. При $p = 2$ избираме $a = b = c = d = 1$, а при $p = 5$ избираме $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 1$ и прилагаме лемата на Хензел в двете ситуации. Нека $p \geq 7$.

Ако $p \not\equiv 1 \pmod 5$, то както в първото решение петите степени пробягват всички остатъци по модул p, значи за $c = 1$, $d = p-1$ и подходящо b свеждаме до $a^2 - 1 \equiv 0$, което по модул p има за решение $a = 1$ (с ненулева производна, съответно лемата на Хензел отново е приложима).

Ако $p \equiv 1 \pmod 5$, то избираме $b = d = p-1, c = 1$ и получаваме сравнението $a^2 - 5 \equiv 0 \pmod p$, което има решение (с $a \not\equiv 0$, съответно лемата на Хензел е приложима). Наистина, 5 е квадратичен остатък по модул p, тъй като от закона за реципрочност

$$\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{5-1}{2}} = \left(\frac{p}{5}\right) = 1.$$

Оценяване. 3 т. за свеждане на задачата до $n = 1$ чрез пълна стратегия с помощта на лемата на Хензел (от които 2 т. ако стратегията е само за достатъчно големи p), 5 т. за доказателство при $n = 1$ за достатъчно големи p, 1 т. за покриване на оставащите $p \not\equiv 1 \pmod 5$, 1 т. за покриване на оставащите $p \not\equiv 1 \pmod 7$, 2 т. за примери (или доказателство за съществуване) при оставащите p.

Задача 3. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, такива че

$$f(x + f(y) - 2y) + f(f(y)) = f(x)$$

за произволни цели числа x и y.

Решение. Ако f е инективна, то при $x = f(y)$ следва $f(2f(y) - 2(y)) = 0$, т.е. $2f(y) - 2y$ е константа. Сега директна проверка на функциите от вида $f(x) = x + c$ води до $c = 0$, т.е. само до решението $f(x) = x$.

Нека f не е инективна, т.е. съществуват $a > b$ с $f(a) = f(b)$. При $y = a$ и $y = b$ получаваме $f(x + f(a) - 2a) = f(x + f(b) - 2b)$, значи f е периодична (в частност – ограничена), като минималният период p не надвишава $2(a - b)$.

Нека m е такова, че $f(m)$ е максимално. Ако допуснем, че $f(f(y)) > 0$ за някое y, то при $x = m + 2y - f(y)$ следва $f(m + f(y) - 2y) > f(m)$, което противоречи на максималността на $f(m)$. Аналогично (с минималност) отхвърляме $f(f(y)) < 0$ за някое y – следователно $f(f(y)) = 0$ за всяко y.

Вече работим с уравнението $f(x + f(y) - 2y) = f(x)$. При $x = 2y$ следва $f(2y) = f(f(y)) = 0$ за всяко y (т.е. f е 0 за четни аргументи), оттук $y = 2$ дава $f(x - 4) = f(x)$, съответно $p \in \{1, 2, 4\}$. Ако $p = 1$, то f е константа и заместване в даденото показва, че тя е 0. Ако $p = 2$, то f е константа в нечетните аргументи и $y = 1$ показва, че тази константа е четна (обратно, всички такива функции работят, понеже $f(f(y)) = 0$ за тях и $f(y) - 2y$ е винаги четно). Ако $p = 4$, то аналогично f е константа за аргументи с остатък 1 при деление на 4 и (същата или друга) константа за аргументи с остатък 3 при деление на 4, като $y = 1$ и $y = 3$ показват, че и двете константи дават остатък 2 при деление на 4.

Оценяване. 1 т. за напълно верен отговор, 1 т. за пълната проверка на всички решения, 1 т. за решаване на уравнението когато f е инективна, 1 т. за доказване, че ако f не е инективна, то тя е периодична и ограничена, 4 т. за доказване на $f(f(y)) = 0$, 2 т. за доказване на $p \in \{1, 2, 4\}$, 0 т. за случая $p = 1$, 1 т. за $p = 2$, 1 т. за $p = 4$.

Задача 4. Диагоналите AD, BE и CF на вписания в окръжност k шестоъгълник $ABCDEF$ се пресичат в една точка P и острият ъгъл между всеки два от тях е с мярка 60°. Нека r_{AB} е радиусът на окръжността, допираща се до отсечките PA и PB и вътрешно до k; радиусите r_{BC}, r_{CD}, r_{DE}, r_{EF} и r_{FA} се дефинират аналогично. Да се докаже, че

$$r_{AB}r_{CD} + r_{CD}r_{EF} + r_{EF}r_{AB} = r_{BC}r_{DE} + r_{DE}r_{FA} + r_{FA}r_{BC}.$$

Решение. Нека O е центърът на k (с радиус R) и O_1, …, O_6 са съответно центровете на окръжностите с радиуси $r_{AB}, \ldots, r_{FA}$. Нека N_1 е петата на перпендикуляра от O_1 към AD. Явно $O_1N_1 = r_{AB}$ и $\sphericalangle N_1PO_1 = \sphericalangle APO_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle APB = 30^\circ$, значи $PO_1 = 2r_{AB}$; аналогично $PO_3 = 2r_{CD}$ и $PO_5 = 2r_{EF}$. Също, $\sphericalangle O_1PO_3 = \sphericalangle O_1PO_5 = 120^\circ$, $OO_1 = R - r_1$, $OO_3 = R - r_3$ и $OO_5 = R - r_5$. Да означим $\sphericalangle OPO_1 = \theta$, $OP = m$ и за яснота нека пишем $a = r_{AB}$, $b = r_{CD}$, $c = r_{EF}$.

Прилагайки Косинусовата теорема за триъгълниците OPO_1, OPO_3 и OPO_5, получаваме

$$\cos\theta = \frac{m^2 + 4a^2 - (R-a)^2}{4ma},\ \cos(120^\circ - \theta) = \frac{m^2 + 4b^2 - (R-b)^2}{4mb},\ \cos(120^\circ + \theta) = \frac{m^2 + 4c^2 - (R-c)^2}{4mc}$$

откъдето чрез тъждеството $\cos\theta + \cos(120^\circ - \theta) + \cos(120^\circ + \theta) = 0$ (приложете $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ за второто и третото събираемо) следва

$$(R^2 - m^2)(ab + bc + ca) = 6Rabc + 3abc(a + b + c). \qquad (\dagger)$$

Нататък, от тъждеството $\cos\theta\cos(120^\circ - \theta) + \cos\theta\cos(120^\circ + \theta) + \cos(120^\circ + \theta)\cos\theta = -\frac{3}{4}$ (от $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$) получаваме (след освобождаване от знаменател)

$$(R^2-m^2)^2(a+b+c)-(R^2-m^2)[4R(ab+bc+ca)+3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)]$$
$$+12R^2abc+12Rabc(a+b+c)+9abc(ab+bc+ca)=-12m^2abc. \qquad (\dagger\dagger)$$

От ($\dagger$) след умножение по $4R$ следва

$$12Rabc(a+b+c)=4R(R^2-m^2)(ab+bc+ca)-24R^2abc$$

и сега заместване в ($\dagger\dagger$), опростяване и разлагане води до

$$[R^2-m^2-3(ab+bc+ca)][(R^2-m^2)(a+b+c)-3abc]=0. \qquad (\dagger\dagger\dagger)$$

Вторият множител е ненулев, иначе от ($\dagger$) би следвало $2R(a+b+c)+a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=0$, което е невъзможно за $a,b,c,R>0$. Следователно $ab+bc+ca=\frac{R^2-m^2}{3}$. Аналогично това е вярно и за другите три радиуса и исканото следва.

Оценяване. 1 т. за предположението, че двете страни са равни на $\frac{R^2-OP^2}{3}$, 2 т. за ($\dagger$), 2 т. за ($\dagger\dagger$), 5 т. за ($\dagger\dagger\dagger$) и 2 т. за довършване; 13 т. за синтетично решение (това може да включва пресмятания с отсечки, но не и тригонометрия).

Задача 5. Дадена е безкрайна в двете посоки мрежа, разделена на единични квадратчета, с два реда и безкраен брой колони. Едно от полетата на втория ред е оцветено в червено, а всички други в мрежата са бели. В началото се намираме в червеното поле.ni За един ход можем да се преместим от поле в друго съседно по страна поле. Да се намери броя на редиците от n хода, при които никое поле не е посещавано повече от веднъж. (В частност, не е позволено след няколко хода отново да се намираме в червеното поле.)

Отговор. 3 за $n=1$, $8F_n-n$ за четни n и $8F_n-4$ за нечетни $n\geq 3$, където $F_1=F_2=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ е редицата на Фибоначи

Решение. (Николай Николов) Нека d_n е броят на редиците с исканото свойство и клетки отгоре и/или отдясно на червената – ще ги наричаме *десни*. Нека e_n е броят на десните редици, в които няма движение наляво в никой ход – тези ще наричаме *ултра десни*, а останалите – *средно десни*. Имаме $e_0=1$, $e_1=2$, $e_{n+2}=e_{n+1}+e_n$, понеже ултра дясна редица $A_0,A_1,\ldots,A_{i+2}$ се получава или от $A_0,A_1,\ldots,A_{i+1}$ (ако колоните на A_{i+1} и A_{i+2} са различни) $A_0,A_1,\ldots,A_i$; съответно $e_n=F_{n+2}$.

Нататък, средно дясна редица $A_0,A_1,\ldots,A_n$ съответства на ултра-дясната редица $A_0,A_1,\ldots,A_k$ за $k\leq n-3$, където колоната на последните клетки на редиците е една и съща; явно колоната при A_{k+1} е тази вдясно и редиците от втория вид ще наричаме *супер десни*. Броят на супер десните редици с дължина k е e_{k-1} (значи и на F_{k+1}; това е вярно и за $k=0$). Имаме директно съответствие между средно десните редици с дължина n и ултра десните редици с дължини $n-3$, $n-5$, …, откъдето

$$d_n=e_n+e_{n-4}+e_{n-6}+\cdots=2F_{n+1}-(1-n \pmod 2)).$$

(Използвахме известните тъждества $F_1+F_3+\cdots+F_{2n-1}=F_{2n}$ и $F_2+F_4+\cdots+F_{2n}=F_{2n+1}-1$, които следват директно по индукция.)

Сега да забележим, че за $n\geq 4$ търсеният брой е равен на $2(d_n+g_n)$, където g_n е броят на редиците $A_0,\ldots,A_{2k+1},A_{2k+2},\ldots,A_n$, в които A_j е j-тата клетка вляво от червената на същия ред, A_{k+1+j} е $j-k$ клетки вдясно от червената и на горния ред, а $A_{2k+2},\ldots,A_n$

е дясна редица, започваща от клетката непосредствено горе вдясно от червената. Така $g_n = d_{n-4} + d_{n-6} + \cdots$, което (съгласно горните Фибоначи тъждества и израза за d_n) е $2F_{n-2} - \frac{n}{2} + 1$ за четно n и $2F_{n-2} - 2$ за нечетно n. Остава да заместим в $2(d_n + g_n)$ и да пресметнем броя директно за $n = 1, 2, 3$.

Коментар. Представеното решение е в N. Nikolov, Self-Avoiding Walks on $\mathbb{Z}\times\{0,1\}$, (2012). Аналогичната задача, при която мрежата е безкрайна само в едната посока, присъства и в контролните за МОМ 2011 на България. Разширения по темата в литературата има от Данговски и Лалов.

Оценяване. 2 т. за верен отговор, по 3 т. за явен вид за e_n, d_n и g_n, 1 т. за довършване.

Задача 6. Естествените числа a, b, c, d са такива, че $(a+c)(b+d) = (ab-cd)^2$. Да се докаже, че $4ad+1$ и $4bc+1$ са точни квадрати на естествени числа.

Решение. Да означим $x = a+c$, $y = b+d$. Уравнението е еквивалентно на $xy = (ay-dx)^2$. При $x = gm^2$ и $y = gn^2$ за естествени g, m, n с НОД$(m,n) = 1$ достигаме до $g^2m^2n^2 = g^2(an^2-dm^2)^2$, т.е. $an^2 \pm mn - dm^2 = 0$. Дискриминантата на това уравнение относно n е $m^2(4ad+1)$ и трябва да е точен квадрат, откъдето $4ad+1$ е точен квадрат. Аналогично $4bc+1$ също е точен квадрат.

Оценяване. 4 т. за свеждане до $xy = (ay-dx)^2$ (или $xy = (bx-cy)^2$), 2 т. за $x = gm^2$ и $y = gn^2$, 3 т. за достигане до подходящо квадратно уравнение относно m или n, 3 т. за довършване.

Задача 7. Даден е краен неориентиран граф, в който всяко ребро принадлежи на най-много три цикъла. Да се докаже, че върховете му могат да се оцветят в три цвята така, че всеки два върха, свързани с ребро, са в различен цвят.
(*Цикъл в граф е редица от различни върхове $v_1, v_2, \ldots, v_k$, $k \geq 3$, такива че v_iv_{i+1} е ребро за всяко $i = 1, 2, \ldots, k$; считаме $v_{k+1} = v_1$. Ребрата v_iv_{i+1} принадлежат на цикъла.*)

Решение. Ще доказваме твърдението на задачата чрез индукция по броя на върховете на дадения граф G. За базата – при граф с не повече от три върха оцветяваме всеки в различен цвят. В общия случай, ако G не е свързан, то всяка негова свързана компонента е граф с по-малко върхове от G и можем да оцветим всяка според индуктивната хипотеза, което дава и исканото оцветяване на G. Оттук нататък ще считаме, че G е свързан.

Ако G притежава срязващ връх a (т.е. след премахването на a и ребрата, които излизат от a, полученият граф не е свързан), можем да разделим G на два индуцирани подграфа G_1 и G_2 с единствен общ връх a, като всеки от тях представлява няколко (поне една) свързани компоненти на $G\backslash\{a\}$ и върха a. Ще ги оцветим по индукционното предположение, като можем да направим така, че цветът на a и в двете оцветявания да е еднакъв. При сливане на оцветяванията получаваме валидно оцветяване на G.

Нека сега G няма срязващ връх, но G има два върха x и y такива, че $G \setminus \{x, y\}$ не е свързан. Тогава G може да се раздели на два индуцирани подграфа G_1' и G_2' с два общи върха x и y. Наистина, ако изберем една свързана компонента и към нейните върхове добавим x и y и ребрата им към тази, то нека това е G_1'; с останалите компоненти по същия начин образуваме G_2'. Построяваме ребро между върховете x и y в новите графи, ако преди това не е имало, и получаваме по-новите графи G_1 и G_2. Ще докажем, че последните два графа изпълняват условието на задачата, за да можем да приложим индуктивната хипотеза върху тях. Ако допуснем, че в някой от тях (например G_1) има ребро $e \neq xy$, принадлежащо на 4 цикъла, то понеже тези цикли не съществуват в G, някои от тях трябва да съдържат реброто xy, а то да не е ребро в G. Да забележим, че понеже $H = G \setminus \{x\}$ е свързан (тъй като G няма срязващ връх), то всеки път в H между два върха от G_1 и G_2, различни от x и y, минава през y. Това значи, че за произволен връх $t \notin \{x, y\}$ от G_2 има път от y до t в G_2, който не минава през x. Аналогично има и път от x до t в G_2, който не минава през y. От последните две следва, че в G_2 има път от x до y, различен от самото ребро xy. Сега за всеки от въпросните 4 цикъла, които съдържат xy, ще използваме пътя в G_2 между x и y, за да получим цикъл през e в G. За тези цикли, които не съдържат xy е вярно, че те са цикли и в G, т.е. получихме 4 цикъла в G през e, което е противоречие. Ако пък $e = xy$, то отново чрез пътя между x и y в G_2 получаваме 4 цикъла в G с общо ребро(на практика всички ребра от въпросния път са общи). Значи G_1 и G_2 удовлетворяват условието на задачата, оцветяваме ги по индукционното предположение. Цветовете на x и y в двете оцветявания са различни (понеже двата са свързани с ребро и в G_1, и в G_2), можем да приемем, че x е оцветен в цвят 1, а y - в цвят 2. Сливаме оцветяванията, получавайки оцветяване на G с желаните условия.

Остава случаят, когато G няма срязващи върхове, както и двойки върхове, чието изтриване нарушава свързаността. Ще докажем, че това е невъзможно за граф, изпълняващ даденото условие за ребра в цикли. Да допуснем противното. Значи всички върхове имат степен поне три. Ще докажем, че има цикъл с дължина поне 4. Да вземем път $v_1 v_2 \dots v_n$ с максимална дължина. Тогава има индекси $i, j\colon 3 \le i < j \le n$ за които $v_1 v_i$ и $v_1 v_j$ са ребра. Сега $v_1 v_2 \dots v_j v_1$ е цикъл с дължина $j \geq 4$. Нека a и b са два несъседни върха от този цикъл. Тогава в $G \setminus \{a, b\}$ съществува път P между двете дъги, на които a и b разделят цикъла – нека краищата на този път са върховете c и d. Понеже те са несъседни върхове в цикъла, то съществува път Q между двете дъги, на които c и d разделят цикъла – нека краищата на този път са u и w. Ако P и Q нямат общи върхове, то върховете c, d, u, w са върхове на K_4, в който ребрата са съответни пътища между тях, като те са два по два непресичащи се. Ако пък P и Q имат общи върхове, нека z е първият такъв при обхождане на Q от u към w. Тогава получаваме аналогичен K_4 с върхове u, z, c, d. Остава да забележим, че в K_4 всяко ребро принадлежи на 4 различни цикъла, което води до исканото противоречие.

Оценяване. 0 т. за индукция само с база и без съществен прогрес; 2 т. за случая на срязващ връх, 6 т. за случая с x, y (от които 2 т. за дефиниране на G_1 и G_2 и обосновка как от тяхно оцветяване се получава такова на G, 2 т. за проверка на условието за цикли на $e \neq xy$, 2 т. за проверка на условието за цикли на $e = xy$), 4 т. за доказване, че няма граф с даденото условие за ребра в цикли, който да не е в един от двата случая (от които 1 т. за доказване, че всеки връх е от степен поне 4)

Задача 8. В пространството са дадени 13 точки, никои четири от които не лежат в една равнина. Три от точките са оцветени в синьо и триъгълникът с върхове тези точки ще наричаме *син*. Останалите 10 точки са оцветени в червено. Ще казваме, че триъгълник с три червени върха е *закачен* за синия триъгълник, ако границата на червения пресича синия (във вътрешността или по границата му) в единствена точка. Възможно ли е броят на закачените триъгълници да е 33?

Решение. За краткост ще пишем $n = 10$, като ще използваме само, че е четно число. Нека G е граф с върхове червените точки, като ребро между две има ако тяхната отсечка пресича (във вътрешността или по границата) синия триъгълник. При всеки три върха има най-много две ребра, понеже отсечката на поне една двойка точки ще лежи изцяло от едната страна на равнината на синия триъгълник. Сумата $\frac{n-2}{2} \sum d_i$ (където d_i е степента на i-тия връх) е равна на броя двойки (ребро; връх, който не е от реброто), понеже за връх има d_i избора за съсед и $n-2$ за друг връх; т.е. тази сума е равна на броя тройки върхове с едно или с две ребра между тях. От друга страна, броят на тройките върхове с две ребра между тях е $\sum \frac{d_i(d_i-1)}{2}$ (от всеки връх има d_i възможности за единия му съсед и $d_i - 1$ за другия, като редът на избор няма значение). Следователно броят триъгълници с желаното свойство е

$$\frac{n-2}{2}\sum d_i - 2\sum \frac{d_i(d_i-1)}{2} = \frac{n}{2}\sum d_i - \sum d_i^2.$$

(Коефициентът 2 се появява, понеже всяка тройка върхове с две ребра допринася с две двойки (ребро; връх, който не е от реброто).)

Понеже n е четно (по условие), $\sum d_i$ също е (от лемата за ръкостискането) и $\sum d_i^2$ също е (понеже d_i и d_i^2 са с еднаква четност, оттук и сумите им), то разглежданият брой триъгълници е непременно четен – в частност, не може да е 33.

Оценяване. 1 т. за ясното твърдение, че броят закачени триъгълници е винаги четен, 1 т. за въвеждането на G и отбелязване, че няма клики от три върха, 8 т. за преброяване на закачените триъгълници, от които 2 т. за $\frac{n-2}{2}\sum d_i$, 2 т. за $\sum \frac{d_i(d_i-1)}{2}$ и 4 т. за комбинирането към окончателен израз, 2 т. за обосновка на четността на израза.